

Un corrigé

I. Résultats généraux

1. Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Il existe une partition (I, J) de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$ avec $p = \text{card } I$, on a $1 \leq p \leq n-1$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $I = \{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$, $J = \{\sigma(p+1), \dots, \sigma(n)\}$, ce qui donne :

$$A_\sigma = T^{-1}AT = (A_{\sigma(i), \sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbf{R})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{R})$ et $T = (\delta_{i\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$.

2. Si A est réductible, il existe alors une matrice de permutation T telle que $T^{-1}AT$ soit de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$. Notons $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ la base de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle $\mathcal{A}$ est représenté par la matrice précédente, alors $\mathcal{A}(e_j) \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ pour tout $j \in \{p+1, \dots, n\}$. Le sous-espace $F = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est donc stable par $\mathcal{A}$.
3. Les composantes du vecteur $y = (\mathbf{Id}_n + A)x$ sont données par :

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Comme A et le vecteur x sont positifs, on a alors $y_i \geq x_i \geq 0$ et y est positif. Avec $y \geq x$, on déduit que y est strictement positif si x l'est. En supposant que x a au moins une composante nulle, de $0 \leq x_i \leq y_i$, on déduit que $y_i = 0$ entraîne $x_i = 0$. Le nombre de coordonnées nulles du vecteur y est donc inférieur ou égal à celui de x . Supposons que y et x ont le même nombre de coordonnées nulles. En notant

$$J_x = \{ i \mid 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i = 0 \},$$

on a $y_i > 0$ pour $i \notin J_x$ et en conséquence $y_i = x_i = 0$ pour tout $i \in J_x$, avec $y_i = \sum_{j \notin J_x} a_{ij}x_j$ et $x_j > 0$ pour $j \notin J_x$. On a donc en tenant compte du fait que les coefficients a_{ij} sont positifs ou nuls, $a_{ij} = 0$ pour $i \in J_x$ et $j \notin J_x$ avec $\text{card } J_x = p$ compris entre 1 et $n-1$ (x a exactement p composantes nuls) ce qui revient à dire que la matrice A est réductible.

En conclusion le nombre de composantes nulles de y est strictement inférieur à celui de x .

4. D'après la question 3. ci-dessus, si $y \geq 0$ non nul, alors le vecteur $(\mathbf{Id}_n + A)x$ a au moins deux coordonnées strictement positives.

Par récurrence on déduit alors que le vecteur $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}x$ a au moins n coordonnées strictement positives, ce qui revient à dire qu'il est strictement positif. En appliquant $n-1$ fois ce résultat à chacun des vecteurs de la base canonique, on constate que toutes les colonnes de $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}$ ont n coefficients non nuls. Ce qui montre que $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1} > 0$.

5. (a) Par division euclidienne de $(1+X)^{n-1}$ par P , il existe des polynômes Q et R tels que $(1+X)^{n-1} = QP + R$ avec $r = \deg R \leq m-1$. Comme $P(A) = 0$ et $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1} > 0$, alors $R(A) = (\mathbf{Id}_n + A)^{n-1} > 0$.

- (b) Posons $R = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k X^k$. On a donc $R(A) = (\mathbf{Id}_n + A)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{C}_{n-1}^k A^k = I_n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{C}_{n-1}^k A^k$ et puis pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$,
- $$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k a_{ij}^{(k)} > 0.$$

Comme les $a_{ij}^{(q)}$ sont tous positifs (on a $a_{ij}^{(q)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(q-1)} a_{kj}$ et A positive), alors il existe au moins un indice $q \leq m-1$ tel que $a_{ij}^{(q)} > 0$.

- (c) De même, $R(A)_{ii} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k a_{ii}^{(k)} > 0$ implique qu'il existe $0 \leq q \leq m-1$ tel que $a_{ii}^{(q)} > 0$.
- (d) Avec $(\mathbf{Id}_n + A)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{C}_{m-1}^k A^k = I_n + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{C}_{m-1}^k A^k$ on déduit que le coefficient d'indice (i, i) de cette matrice est $c_{ii} = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{C}_{m-1}^k a_{ii}^{(k)} \geq 1 > 0$ et pour $i \neq j$, du fait qu'il existe q entre 1 et $m-1$ tel que $a_{ij}^{(q)} > 0$, on a pour le coefficient d'indice (i, j) de $(\mathbf{Id}_n + A)^{m-1}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{C}_{m-1}^k A^{(k)} \geq \mathbb{C}_{m-1}^q A^{(q)} > 0.$$

En définitive la matrice $(\mathbf{Id}_n + A)^{m-1}$ est strictement positive.

II. Valeurs propres de matrices positives irréductibles

1. Notons $\Delta = \{ x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \mid x \geq 0 \}$. Si $\alpha > 0$ et $x \in \Delta$, on a $r(\alpha x) = r(x)$. En effet

$$r(\alpha x) = \min_{\alpha x_i \neq 0} \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}(\alpha x_j)}{\alpha x_i} = \min_{x_i \neq 0} \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j)}{x_i} = r(x).$$

Donc, $\forall x \in \Delta, r(x) = r\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ et $\sup_{x \in \Delta} r(x) = \sup_{x \in M} r(x)$.

Comme $N = (\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}(M) \subset \{ x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \mid x \geq 0 \} = \Delta$, nous avons directement

$$\sup_{x \in N} r(x) \leq \sup_{x \in \Delta} r(x) = \sup_{x \in M} r(x) \quad (1)$$

Soit $x \in M$ et $r \geq 0$ tel que $rx \leq Ax$, puisque $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1} > 0$ on a $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}(rx) \leq (\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}(Ax)$ ou encore $r(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}x \leq A((\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}x)$ car A et $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}$ commutent. Si on pose $y = (\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}x$, alors $ry \leq Ay$ et par conséquent $r(x) \leq r(y) \leq \sup_{x \in N} r(x)$. Ceci prouve que $\sup_{x \in M} r(x) \leq \sup_{x \in N} r(x)$.

En tenant compte de l'inégalité 1, on a

$$\sup_{x \in \Delta} r(x) = \sup_{x \in M} r(x) = \sup_{x \in N} r(x).$$

2. Les formes linéaires $x \mapsto x_i$ et $x \mapsto (Ax)_i$ sont continues pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc les applications $\varphi_i : x \mapsto \frac{(Ax)_i}{x_i}$ sont continues sur N . D'où la continuité de $r = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\varphi_i)$.

M est un fermé borné de $\mathbf{R}^n$, donc compact. N est l'image par l'application continue $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}$ (linéaire en dimension finie) du compact M , donc N est un compact de $\mathbf{R}^n$.

Par continuité de l'application r et la compacité de N , il existe $z \in N$ tel que $r(z) = \max_{y \in N} r(y) := \rho$. D'autre part, il existe $x \in M$ tel que $z = (\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}x$. On sait que $z = (\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}x > 0$ et comme A est positive $Az > 0$. En effet, notons $y = Az$, si l'on avait $(Az)_i = 0$, la i -ème ligne de A serait nulle. Les matrices A^j , pour $j \geq 1$, auraient alors également leur i -ème ligne nulle et

$$(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1} = I_n + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{C}_{j=1}^{n-1} A^j$$

ne serait pas strictement positive. On en déduit que Ay est strictement positif, puis $\rho = r(z) = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{(Az)_i}{z_i} > 0$.

3. Supposons que $\xi = Az - \rho z$ est non nul. On sait que $\xi \geq 0$. Comme $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}$ est strictement positive, alors $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}\xi$ est strictement positif. De la relation

$$(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}Az = \rho(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}z + (\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}\xi$$

on déduit donc la relation suivante :

$$(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}Az > \rho(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}z$$

Posons $z' = (\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}z$. De la relation précédente il résulte que $Az' > \rho z'$, on peut donc trouver $\varepsilon > 0$ tel que $Az' \geq (\rho + \varepsilon)z'$ ce qui contredit la maximalité de $r(z) = \rho$. Donc $\xi = 0$ et on a $Az = \rho z$. ρ est donc bien une valeur propre de A et z un vecteur propre associé à ρ .

Montrons maintenant que $z > 0$. On a :

$$(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}Az = \rho(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}z = \rho(\mathbf{Id}_n + A)^{n-2}(\mathbf{Id}_n + A)z = \rho(1 + \rho)(\mathbf{Id}_n + A)^{n-2}z.$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$A(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}z = \rho(1 + \rho)^{n-1}z.$$

z étant positif, non nul, $(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}z$ est strictement positif ainsi que $A(\mathbf{Id}_n + A)^{n-1}z$. Mais pour que $\rho(1 + \rho)^{n-1}z$ soit strictement positif il est nécessaire que z soit strictement positif.

4. Soit y un vecteur propre associé à la valeur propre α . De l'égalité $Ay = \alpha y$, on a $\alpha y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

D'où

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\alpha||y_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}|y_j|$$

On a donc y^+ est positif et $|\alpha|y^+ \leq Ay^+$, c'est-à-dire $Ay^+ - |\alpha|y^+ \in \Delta$. Par définition de $r(y^+)$ et de ρ on a :

$$|\alpha| \leq r(y^+) \leq \rho.$$

5. Supposons $\alpha = \rho$, on a donc $\rho y^+ \leq Ay^+$. D'après ce qui précède $\rho y^+ = Ay^+$ et donc y^+ est strictement positif ce qui implique nécessairement que les coordonnées de y sont toutes non nulles.

Soit x et y deux vecteurs de $\mathbf{C}^n$ vecteurs propres de A associés à ρ . D'après ce qui précède, on a $x^+ > 0$ et $y^+ > 0$.

Soit $z = y - \frac{y_1}{x_1}x = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. On a $z_1 = 0$ et $Az = \rho z$. Si $z \neq 0$, alors $|z| = z^+ > 0$. Mais on n'a pas $z^+ > 0$

car $z_1 = 0$. Donc $z = 0$, c'est-à-dire $y = \lambda x$ avec $\lambda = \frac{y_1}{x_1}$. Cela montre que $\dim \ker(A - \rho \mathbf{Id}_n) \leq 1$, et comme ρ est une valeur propre, alors $\dim \ker(A - \rho \mathbf{Id}_n) \geq 1$, d'où

$$\dim \ker(A - \rho \mathbf{Id}_n) = 1$$

6. D'après la question précédente le sous-espace propre relatif à ρ est de dimension 1, il en résulte que $\rho \mathbf{Id}_n - A$ est de rang $n - 1$ et que par suite il y a au moins un co-facteur non nul, ce qui montre que $B(\rho) \neq 0$. De plus on sait que

$$(\lambda \mathbf{Id}_n - A)^t B(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{Id}_n - A) \mathbf{Id}_n.$$

En particulier $(\rho \mathbf{Id}_n - A)^t B(\rho) = 0$, ce qui montre que les colonnes non nulles de ${}^t B(\rho)$, c'est-à-dire les lignes de $B(\rho)$, sont des vecteurs propres de A relatives à ρ et par suite que ces lignes non nulles sont toutes multiples de l'une d'entre elles, d'où $\text{rg}(B(\rho)) = 1$.

7. D'après la question précédente, les lignes non nulles de $B(\rho)$ sont des vecteurs propres associés à ρ , donc elles ont toutes leurs composantes non nulles et de même signe.

Mais on a aussi ${}^t B(\rho)(\rho \mathbf{Id}_n - A) = 0$, soit en transposant $(\rho \mathbf{Id}_n - {}^t A)B(\rho) = 0$. Or ${}^t A$ est aussi une matrice positive irréductible puisque $({}^t A + \mathbf{Id}_n)^{n-1} = {}^t((A + \mathbf{Id}_n)^{n-1}) > 0$. Le raisonnement précédent appliqué à ${}^t A$ permet ainsi de montrer que les colonnes non nulles de $B(\rho)$ ont tous leurs éléments non nuls et de même signe.

Finalement on en déduit facilement que $B(\rho)$ a tous ses éléments non nuls et de même signe. En effet soient $b_{i,j}(\rho)$ et $b_{k,l}(\rho)$ deux éléments quelconques de $B(\rho)$. Si $b_{i,j}(\rho) = 0$ toute sa ligne est nulle, donc $b_{i,l}(\rho) = 0$, par suite toute la colonne l est nulle et ainsi $b_{k,l}(\rho) = 0$. On en déduit que $B(\rho) = 0$, ce qui est exclu. D'autre part le signe de $b_{i,j}(\rho)$ est celui de $b_{i,l}(\rho)$ et finalement celui de $b_{k,l}(\rho)$. Tous les éléments de $B(\rho)$ sont bien non nuls et de même signe.

8. On a, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, ${}^t B(\lambda)(\lambda \mathbf{Id}_n - A) = \chi_A(\lambda) I_n$. Par dérivation, on obtient :

$$\frac{d{}^t B}{d\lambda}(\lambda)(\lambda \mathbf{Id}_n - A) + {}^t B(\lambda) = \frac{d\chi_A}{d\lambda}(\lambda) \mathbf{Id}_n.$$

En particulier $\frac{d{}^t B}{d\lambda}(\rho)(\rho \mathbf{Id}_n - A) + {}^t B(\rho) = \frac{d\chi_A}{d\lambda}(\rho) \mathbf{Id}_n$ ce qui implique, pour x un vecteur extrémal, ${}^t B(\rho)x = \frac{d\chi_A}{d\lambda}(\rho)x$. Si $\frac{d\chi_A}{d\lambda}(\rho) = 0$ on obtient, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n b_{ji}(\rho)x_j = 0$ ce qui est absurde puisque les x_i sont

strictement positifs et les coefficients de $B(\rho)$ sont non nuls et de même signe. Ceci montre que $\frac{d\chi_A}{d\lambda}(\rho) \neq 0$ et par conséquent ρ est valeur propre simple de A .

Autre méthode : On a $\frac{d\chi_A}{d\lambda}(\lambda) = \sum_{i=1}^n b_{i,i}(\lambda) = \text{Tr}(B(\lambda))$. En effet désignons par $A_i(\lambda)$ la i -ème colonne de la matrice $\lambda \mathbf{Id}_n - A$.

On a :

$$\frac{d\chi_A}{d\lambda}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \det(A_1(\lambda), A_2(\lambda), \dots, A_n(\lambda)) = \sum_{i=1}^n \det(A_1(\lambda), A_2(\lambda), \dots, A'_i(\lambda), \dots, A_n(\lambda)).$$

Mais $A'_i(\lambda)$ a tous ses éléments nuls sauf le i -ème qui est égal à 1. Le résultat s'ensuit immédiatement. On a donc $\frac{d\chi_A}{d\lambda}(\rho) \neq 0$ puisque tous les éléments de $B(\rho)$ sont non nuls et de même signe. Ceci montre bien que ρ est valeur propre simple de A .

III- "Réduction" des matrices positives irréductibles

1. (a) Soit y un vecteur propre associé à la valeur propre γ . L'égalité $Cy = \gamma y$ donne :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \gamma y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\gamma y_i| \leq \sum_{j=1}^n |c_{ij}| |y_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} |y_j|$$

car par hypothèse $|C| = C^+$ est inférieur ou égal à A . Posons $y^+ = |y|$. On a donc $y^+ \geq 0$, non nul et $|\gamma| y^+ \leq A y^+$. Par définition de $r(y^+)$ et de ρ , on a :

$$|\gamma| \leq r(y^+) \leq \rho.$$

(b) Supposons $|\gamma| = \rho$. On a donc $Ay^+ \geq \rho y^+$, y^+ est extrémal et d'après ce qui précède on a $Ay^+ = \rho y^+$. D'où :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \rho |y_i| = |\gamma| |y_i| = \sum_{j=1}^n a_{ij} |y_j| \quad (2)$$

soit

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\gamma y_i| \leq \sum_{j=1}^n |c_{ij}| |y_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} |y_j|$$

d'après la relation (2) ci-dessus. Ce qui entraîne

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n (a_{ij} - |c_{ij}|) |y_j| = 0.$$

Ceci est équivalent à $C^+ y^+ = Ay^+$. De plus, d'après ce qui précède y^+ , étant extrémal, est strictement positif, $|y_j|$ est strictement positif. Donc on a $\forall i, j, a_{ij} = |c_{ij}|$. La matrice A est égale à C^+ .

(c) Les composantes de y sont non nuls, on pose donc $y_i = e^{i\psi_i} |y_i|$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ où les ψ_i sont des réels. On a donc $y = Dy^+$ où $D = \text{diag}(e^{i\psi_1}, e^{i\psi_2}, \dots, e^{i\psi_n})$.

Soit y un vecteur propre relatif à γ . On a vu ci-dessus (cf. (1)) que $|y|$ était un vecteur extrémal et donc un vecteur propre relatif à γ . Comme $Cy = \gamma y$ et $\gamma = \rho e^{i\phi}$ on a

$$CDy^+ = \gamma Dy^+ = \rho e^{i\phi} Dy^+ = e^{i\phi} DAy^+.$$

ou encore

$$D^{-1}CDy^+ = e^{i\phi} Ay^+$$

Mais l'égalité $e^{-i\phi} D^{-1}CDy^+ = Ay^+$ entraîne $e^{-i\phi} D^{-1}CD = A$. En effet, posons $W = e^{-i\phi} D^{-1}CD$. On voit immédiatement que $\forall i, j, |w_{ij}| = |c_{ij}| = a_{ij}$. En écrivant l'égalité $Wy^+ = Ay^+$ pour la ligne i

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} y_j^+ = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^+$$

et en tenant compte de $|w_{ij}| = a_{ij}$ et $y^+ > 0$ on obtient

$$e^{-i\phi} D^{-1}CD = A.$$

D'où :

$$C = e^{i\phi} DAD^{-1}.$$

(d) Le même raisonnement avec $\gamma = \rho e^{i\phi_k}$, $0 \leq k \leq h-1$, et $C = A$.

2. Soit $k \in \llbracket 1, h-1 \rrbracket$. On a $A = e^{i\phi_k} D_k A D_k^{-1}$ et A et $D_k A D_k^{-1}$ sont semblables, donc elles ont le même polynôme caractéristique, d'où pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\chi_A(\lambda) = \chi_{D_k A D_k^{-1}}(\lambda) = \det(\lambda I_n - D_k A D_k^{-1}) = \det(\lambda I_n - e^{-i\phi_k} A) = e^{-ni\phi_k} \det(\lambda e^{i\phi_k} - A) = e^{-ni\phi_k} \chi_A(\lambda e^{i\phi_k}).$$

En particulier, $\chi_A(\lambda) = e^{-ni\phi_k} \chi_A(\lambda e^{i\phi_k})$. Donc ρ et $\lambda_k = \rho e^{i\phi_k}$ ont même ordre de multiplicité, en particulier les λ_k sont des valeurs propres simples.

Pour k fixé, l'équation $A = e^{i\phi_k} D_k A D_k^{-1}$ reste vrai si D_k est remplacé par $a D_k$ pour tout $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{0\}$. En multipliant par la coefficient d'indice $(1, 1)$ de D_k^{-1} , on peut supposer que $(D_k)_{11} = 1$.

3. En appliquant le résultat de la question 1. ci-dessus, on a $A = e^{i\phi_k} D_k A D_k^{-1}$ et $A = e^{i\phi_j} D_j A D_j^{-1}$ ce qui entraîne $e^{i\phi_k} D_k A D_k^{-1} = e^{i\phi_j} D_j A D_j^{-1}$ soit

$$A = e^{i(\phi_j - \phi_k)} D_j D_k^{-1} A D_k D_j^{-1}$$

et

$$A = e^{i(\phi_j + \phi_k)} D_j D_k A D_k^{-1} D_j^{-1}.$$

4. Notons $G = \{ e^{i\phi_0} = 1, e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_{h-1}} \} \subset \mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$. D'après la question ci-dessus G est stable par multiplication, et puisque $(\mathbb{U}, *)$ est un groupe abélien, alors $(G, *)$ est un sous-groupe abélien. Donc $(G, *)$ est un groupe multiplicatif et abélien.

De plus, on peut vérifier que l'application $\phi_k \mapsto D_k$ est bien définie et définit un morphisme de groupes.

5. Notons $\Phi = \{ \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{h-1} \}$. Montrons aussi $\phi_1 + \phi_1 = \phi_2$, en effet, on a $0 < \phi_1 + \phi_1 - \phi_2 < \phi_1$ et donc $\phi_1 + \phi_1 - \phi_2 \notin \Phi$ ce qui est absurde. D'où $\phi_2 = \phi_1 + \phi_1 = 2\phi_1$ puis par récurrence $\phi_k = k\phi_1$ pour tout k et $h\phi_1 = 2\pi$. Donc $\phi_k = \frac{2\pi k}{h}$, nous pouvons écrire donc $\lambda_k = \rho w^k$ où $w = e^{\frac{2i\pi}{h}}$ le premier racine de l'unité de degré h .

Notons f l'isomorphisme qui existe entre $\{ e^{i\phi_k} \mid 0 \leq k \leq h-1 \} = \{ \left(e^{\frac{2i\pi}{h}} \right)^k \mid 0 \leq k \leq h-1 \}$ et $\{ D_0, D_1, \dots, D_{h-1} \}$,

alors $D_k = f(e^{i\phi_k}) = f\left(e^{\frac{2i\pi}{h}}\right)^k = D_1^k$.

6. En tenant compte du fait que $\lambda_k = \rho w^k$, nous avons

$$A = w D_1 A D_1^{-1} = w^2 D_1^2 A D_1^{-2} = \dots = w^{h-1} D_1^{h-1} A D_1^{-(h-1)} = D_1^h A D_1^{-h}.$$

La équation implique

$$A_{ij} = (D_1^h)_{ii} A_{ij} (D_1^{-h})_{jj}$$

pour tous i et j de $\{1, 2, \dots, n\}$. Comme A est strictement positive, alors $(D_1^h)_{ii} = (D_1^h)_{jj}$ et comme $(D_1)_{11} = 1$, alors $D_1^h = I_n$. Ainsi, tous les éléments diagonaux de D_1 sont les racines h -ème de l'unité. Il existe donc une matrice de permutation S telle que

$$\Delta = {}^t S D_1 S = S^{-1} D_1 S = \begin{pmatrix} \beta_1 I_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 I_{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

où les $\beta_k = e^{\frac{2i\pi}{h} m_k}$, $0 = m_1 < m_2 < \dots < m_s < h$ ($m_1 = 0$ car le premier coefficient de D_1 est égal à 1) sont des racines h -ème de l'unité et où les n_i sont des entiers naturels de somme égale à n .

7. En posant de même $B = S^{-1} A S$ on trouve $\Delta^{-1} B \Delta = e^{\frac{2i\pi}{h}} B$. Partitionnons B suivant la même forme que Δ :

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,s} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s,1} & B_{s,2} & \dots & B_{s,s} \end{pmatrix}.$$

Nous allons montrer par récurrence que

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad m_k = k - 1.$$

La propriété est vraie pour $k = 1$. Supposons qu'elle le soit jusque $k < s$. L'égalité

$$\Delta^{-1} B \Delta = e^{\frac{2i\pi}{h}} B$$

donne en ce qui concerne la ligne de blocs d'inde k :

$$\forall l \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad e^{\frac{2i\pi}{h}} B_{k,l} = e^{\frac{2i\pi}{h} (m_l - m_k)} B_{k,l}.$$

Comme les B_{kl} ne sont pas tous nuls puisque la matrice est irréductible il existe $l \in \{1, 2, \dots, s\}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $m_l - m_k = 1 + ph$, soit $m_l = k + ph$. Mais comme $k \leq s \leq h$ et $0 \leq m_l < h$ on en déduit $p = 0$ par élimination des cas $p < 0$ et $p > 0$.

Donc $m_l = k = (k-1) + 1 = m_k + 1$. Ceci ne peut se réaliser que si m_l est le successeur immédiat de m_k dans la suite croissante des m_j . Donc $l = k + 1$ et $m_{k+1} = m_l = k$, ce qui achève la récurrence.

D'autre part $e^{\frac{2i\pi}{h}} B_{k,l} = e^{\frac{2i\pi}{h}(l-k)} B_{k,l}$ montre que si $l - k$ n'est pas congru à 1 modulo h on a $B_{k,l} = 0$.

Il reste à prouver que $s = h$. Or en considérant la dernière ligne de blocs on ne peut avoir $n_l = l - 1 = s + ph$ que si $p = -1$. En effet si $p \geq 0$ on a $l > s$, ce qui est impossible et si $p < -1$, $n_{l-1} < 0$ également exclu. Donc $l - 1 = s - h$ soit $l = s - h + 1$. Mais $0 < l = s - h + 1$ et donc $s > h - 1$ soit $s \geq h$. Comme on a évidemment $s \leq h$ on a $s = h$, d'où la forme de B :

$$S^{-1}AS = B = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{h-1} \\ A_h & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où S est une matrice de permutation et $A_i = B_{i,i+1}$ pour $1 \leq i \leq h - 1$ et $A_h = B_{h,1}$.

• • • • •